TD Convexité

6TA **Exercice 1**

1. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.
2. Soient $a, b, p, q > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)e^{\lambda} + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-\lambda}$.

ORH **Exercice 2** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. Montrer que $\max\limits_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$.
2. Que dire de l'ensemble des points où f atteint un minimum ?

UYJ **Exercice 3** ♣ Inégalités des moyennes Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs et des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement positifs, de somme 1. Pour $\alpha \neq 0$, on définit la moyenne d'ordre α, $M(\alpha) = \left(\sum \lambda_i x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1. Montrer que la fonction M se prolonge par continuité en 0 par la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.
2. Montrer que pour tous $\alpha > 0$, $\prod x_i^{\lambda_i} \leq \left(\sum \lambda_i x_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$.
3. Montrer que M est croissante. Quelles sont ses limites en $\pm\infty$?

P9B **Exercice 4** Notons A, B, C les angles d'un triangle. Quelle est la valeur maximale que peut prendre la somme $\sin A + \sin B + \sin C$?

R0E **Exercice 5**

1. Soit f convexe et dérivable sur $[a,b]$. Montrer que $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. ★ Étendre le résultat sans l'hypothèse de dérivabilité.

VHE **Exercice 6** Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et bornée, elle est constante. Est-ce le cas pour une fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$?

Z3R **Exercice 7**

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.
2. Montrer que si f converge en $+\infty$, alors $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et f est décroissante.

KAI **Exercice 8** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_2 = \left\{\frac{p}{2^n},\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. ★ Montrer que f est convexe.

ICI **Exercice 9** ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe inférieure à f.

UG2 **Exercice 10** ★ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall x, \forall h > 0,\ 2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : *Les deux hypothèses sont invariantes par l'ajout d'une fonction affine.*

TD Convexité

6TA **Exercice 1**

1. Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.
2. Soient $a, b, p, q > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)e^{\lambda} + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-\lambda}$.

ORH **Exercice 2** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

1. Montrer que $\max\limits_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$.
2. Que dire de l'ensemble des points où f atteint un minimum ?

UYJ **Exercice 3** ♣ Inégalités des moyennes Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs et des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement positifs, de somme 1. Pour $\alpha \neq 0$, on définit la moyenne d'ordre α, $M(\alpha) = \left(\sum \lambda_i x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1. Montrer que la fonction M se prolonge par continuité en 0 par la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$.
2. Montrer que pour tous $\alpha > 0$, $\prod x_i^{\lambda_i} \leq \left(\sum \lambda_i x_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$.
3. Montrer que M est croissante. Quelles sont ses limites en $\pm\infty$?

P9B **Exercice 4** Notons A, B, C les angles d'un triangle. Quelle est la valeur maximale que peut prendre la somme $\sin A + \sin B + \sin C$?

R0E **Exercice 5**

1. Soit f convexe et dérivable sur $[a,b]$. Montrer que $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. ★ Étendre le résultat sans l'hypothèse de dérivabilité.

VHE **Exercice 6** Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et bornée, elle est constante. Est-ce le cas pour une fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$?

Z3R **Exercice 7**

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.
2. Montrer que si f converge en $+\infty$, alors $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et f est décroissante.

KAI **Exercice 8** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_2 = \left\{\frac{p}{2^n},\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. ★ Montrer que f est convexe.

ICI **Exercice 9** ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe inférieure à f.

UG2 **Exercice 10** ★ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall x, \forall h > 0,\ 2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : *Les deux hypothèses sont invariantes par l'ajout d'une fonction affine.*